Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Faculdade de Engenharia elétrica
Trabalho de Princípios de Telecomunicações I
PSD de Vários tipos de códigos

Trabalho de Princípios de Telecomunicações I

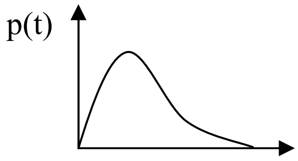
Aluno:
Adriano Martins Moutinho

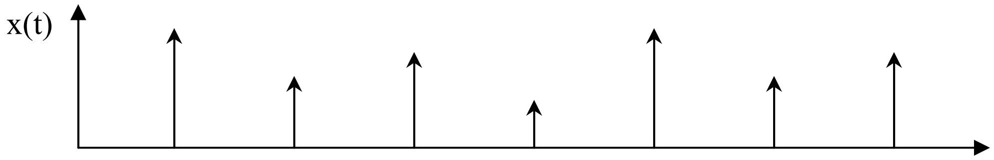
Turma: 01

Trabalho de Princípios de Telecomunicações I

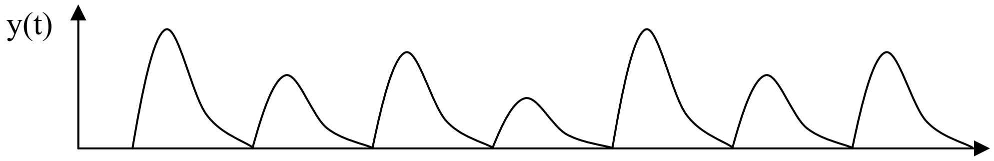
- **PSD de Vários tipos de códigos**

Um sinal aleatório pode ser formado por um sinal contínuo p(t) e um sinal discreto formado por impulsos x(t), como mostram as figuras abaixo:





O sinal aleatório y(t) será:



As amplitudes dos pulsos em x(t) são aleatórias, sendo que se convenciona que o pulso de número K tem "energia" A_K.

Essa separação nos permitirá calcular qualquer PSD, de qualquer sinal aleatório, conhecendo-se previamente a P(w), transformada de Fourier do sinal pulso básico p(t) e a PSD do sinal x(t), pois:

$$S_Y(w) = |P(w)|^2 S_X(w)$$

Para isso precisamos encontrar primeiramente a função autocorrelação no tempo $R_X(\tau)$, e da mesma, encontrar a PSD de x(t).

Imaginemos, para isso, que x(t) é uma seqüência de pulsos retangulares com largura bem pequena, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Consideramos então que a "energia" do pulso A_K pode ser dividida em altura H_K e comprimento do pulso ε, dessa forma, a "energia" será:

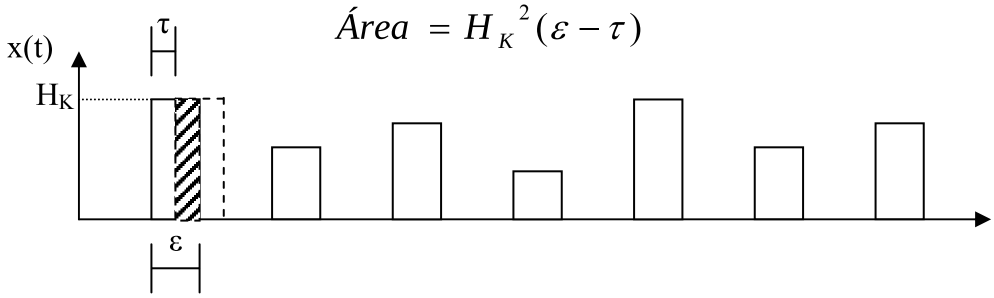
$$A_K = \varepsilon H_K$$

A autocorrelação $R_X(\tau)$, é dada pela fórmula abaixo:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$$

Sendo a integral um somatório de áreas de pulsos com largura ε multiplicados por outros pulsos adiantados de τ. Podemos calcular a área observando a figura:

$$\acute{A}rea = H_K{}^2(\varepsilon - \tau)$$



Então, para $\tau < \varepsilon$, temos:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_K H_K{}^2(\varepsilon - \tau) \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_K A_K{}^2\left(\frac{\varepsilon-\tau}{\varepsilon^2}\right) \\ &= \frac{R_0}{\varepsilon T_B}\left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Onde:

$$R_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{T_B}{T}\sum_K A_K{}^2$$

A autocorrelação é uma função par, por isso, τ pode ser substituído por seu módulo, o que resulta em uma função triangular centrada em $\tau = 0$.

Podemos perceber que R_0 é a média das "energias" A_K, o que em uma distribuição aleatória significa a distribuição de probabilidade dos valores de A_K.

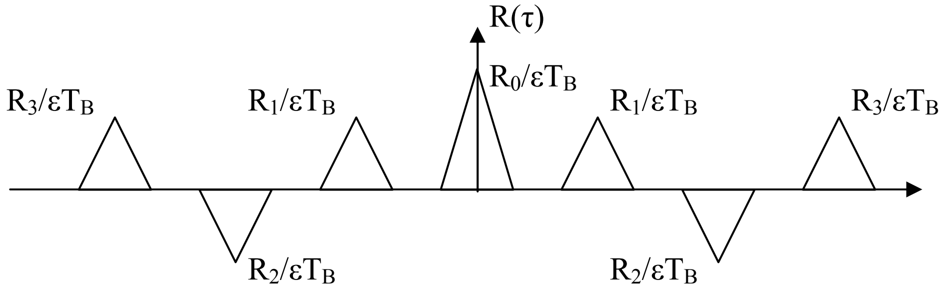
Assim que o valor de τ cresce, o pulso adiantado encontra o próximo pulso. O valore de R passa a ser, para $2\varepsilon < \tau > \varepsilon$:

$$R_1 = \lim_{T \to \infty} \frac{T_B}{T} \sum_K A_K A_{K+1}$$

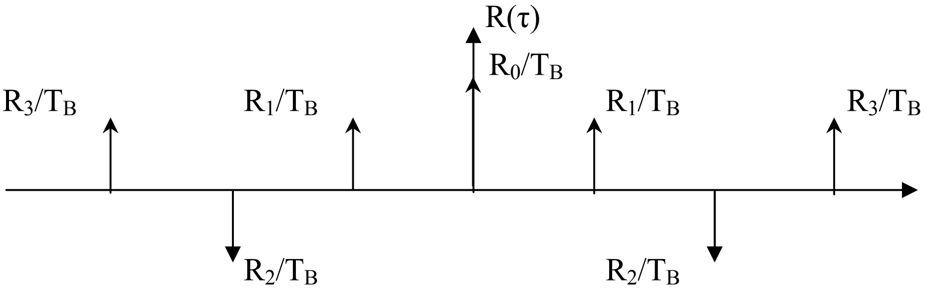
Generalizando para qualquer τ, temos:

$$R_N = \lim_{T \to \infty} \frac{T_B}{T} \sum_K A_K A_{K+N}$$

A autocorrelação é então, para qualquer valor de τ, uma série de funções triangulares com amplitude $R_N/\varepsilon T_B$, ou seja, o triângulo central tem amplitude $R_0/\varepsilon T_B$, os triângulos adjacentes tem amplitude $R_1/\varepsilon T_B$ e assim por diante:



Como, para um valor de ε finito, a autocorrelação é uma função triangular, para ε=0 a autocorrelação será um somatório de funções impulso, deslocadas de R_N/T_B:



Assim, $R(\tau)$ para todo τ, pode ser escrito na forma de somatório por:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_B} \sum_{N=-\infty}^{\infty} R_N \delta(\tau - NT_B)$$

A PSD de x(t) é a transformada de Fourier de $R_X(\tau)$, assim:

$$S_X(w) = \frac{1}{T_B} \sum_{N=-\infty}^{\infty} R_N e^{-jNwT_B}$$

A PSD do sinal de saída y(t) será a PSD de x(t) multiplicado pelo quadrado do módulo da transformada de Fourier P(w), portanto:

$$S_Y(w) = \frac{|\mathrm{P(w)}|^2}{\mathrm{T_B}} \sum_{N=-\infty}^{\infty} R_N e^{-jNwT_B}$$

- ## Sinalização ON-OFF:

A sinalização on-off é obtida transmitindo pulsos p(t) para informação binária 1 e nenhum pulso para informação binária 0. Assim, usando os resultados do item anterior, podemos calcular R_0 e R_N e chegar ao valor de $S_Y(w)$.

R_0 pode ser calculado como se mostra abaixo, levando-se em consideração que a amplitude é “1” em 50% dos casos e “0” nos outros 50%.

$$R_0 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{N} \sum_K A_K{}^2$$

$$R_0 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}(1) + \frac{N}{2}(0) \right]$$

$$R_0 = \frac{1}{2}$$

Rn pode ser calculado como se mostra abaixo, levando-se em consideração que a amplitude é “1” em 25% dos casos e “0” nos outros 75%, só ocorrem amplitudes 1 quando os pulsos consecutivos são 1, o que ocorre em 25% dos casos.

$$R_N = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{N} \sum_K A_K A_{K+N}$$

$$R_N = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4}(1) + \frac{3N}{4}(0) \right]$$

$$R_N = \frac{1}{4}$$

Assim, usando-se a equação obtida no item anterior, a PSD deste tipo de sinal pode ser calculada abaixo, lembrando-se que R_N é ¼ para qualquer N diferente de 0 e é ½ para N=0.

$$S_X(w) = \frac{1}{4\mathrm{T_B}} + \frac{1}{4T_B} \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-jNwT_B}$$

Usando-se a equivalência abaixo:

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-jNwT_B} = \frac{2\pi}{T_B}\sum_{N=-\infty}^{\infty}\delta\left(w-\frac{2\pi N}{T_B}\right)$$

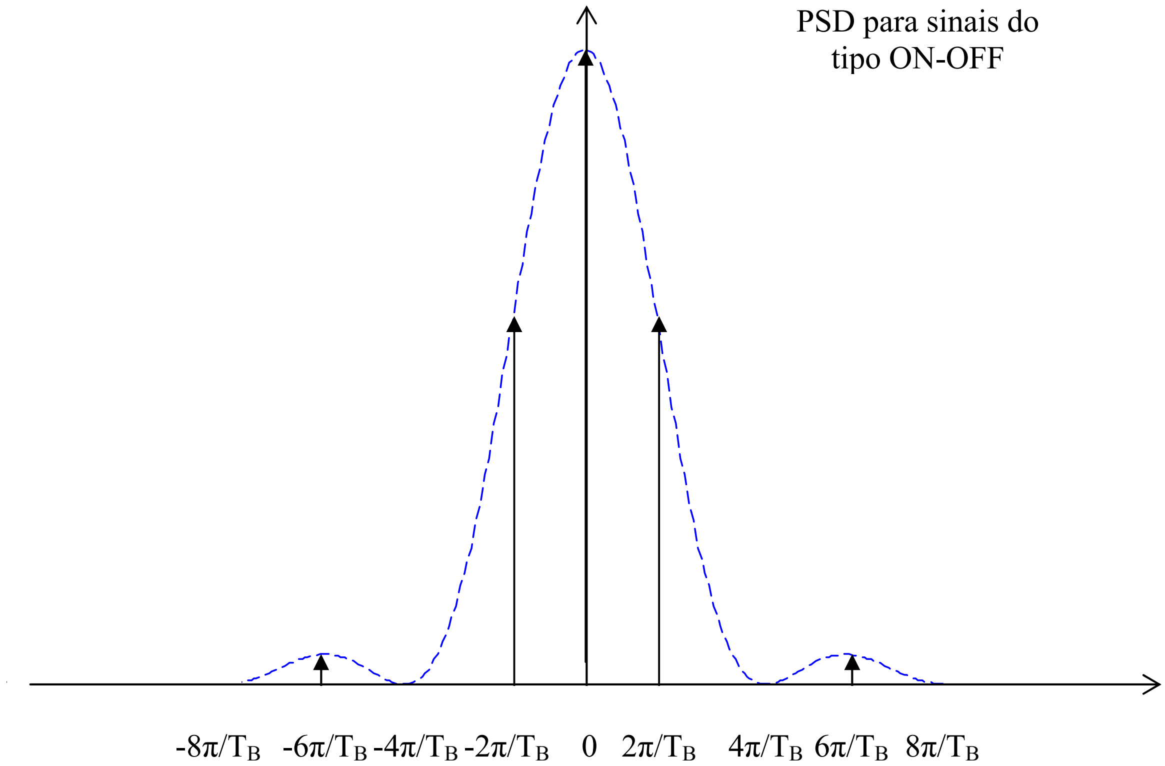
Simplificamos $S_X(w)$ como:

$$S_X(w) = \frac{1}{4\mathrm{T}_B} + \frac{2\pi}{4T_B^2}\sum_{N=-\infty}^{\infty}\delta\left(w-\frac{2\pi N}{T_B}\right)$$

Considerando o pulso básico p(t) um retângulo, sua transformada de Fourier P(w) será uma função da forma sinc^2, o que leva a fórmula abaixo, para $S_Y(w)$:

$$S_Y(w) = \frac{\mathrm{T}_B}{16}Sinc^2\left(\frac{wT_B}{4}\right)\left[1+\frac{2\pi}{T_B}\sum_{N=-\infty}^{\infty}\delta\left(w-\frac{2\pi N}{T_B}\right)\right]$$

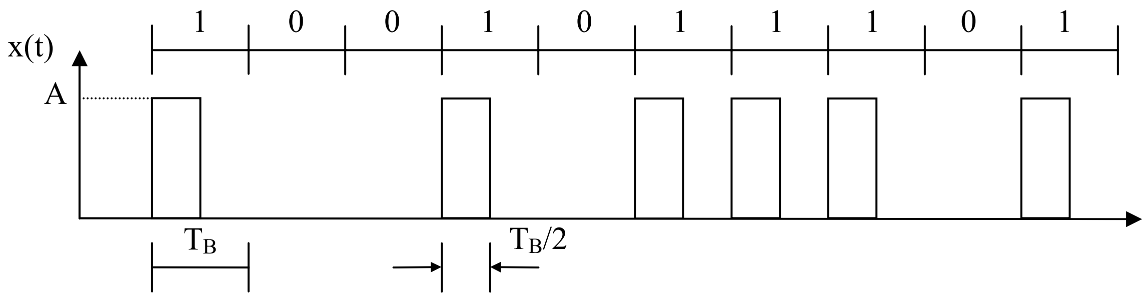
Cujo gráfico pode ser mostrado abaixo:



Sinais como este possuem problemas na transmissão, pois não é recomendado que haja uma grande parcela de potência concentrada em w=0 (dc).

- **Exercício 3.8-2:**

Determine a autocorrelação e a PSD do sinal abaixo:



Solução:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$$

A área de cada função produto com deslocamento pode ser calculada observando-se a figura abaixo:

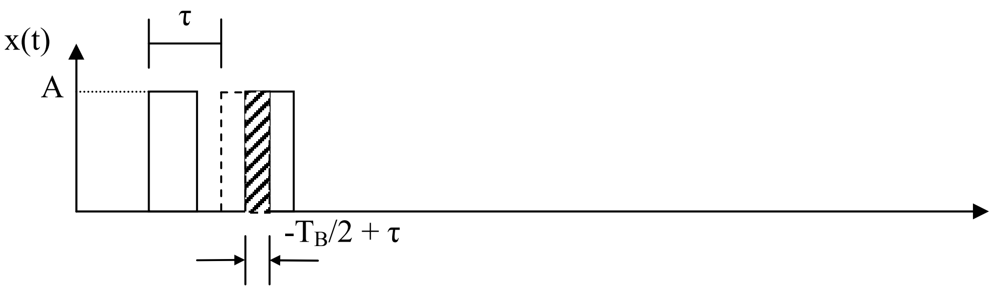
Dessa forma, a área de cada função será $A^2(T_B/2-\tau)$, para $\tau < T_b/2$:

Como em um período T ocorrem N pulsos de tamanho T_B, o período será NT_B. Haverá 50% de valores "1" e 50% de valores "0", o que leva a uma integração igual a N vezes a área calculada dividido por 2:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{NT_B}\left[\frac{N}{2}A^2(\frac{T_B}{2}-\tau)\right]$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\left[(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{T_B})\right]$$

Para $T_B > \tau > T_B/2$, teremos uma área bastante parecida com o primeiro caso:

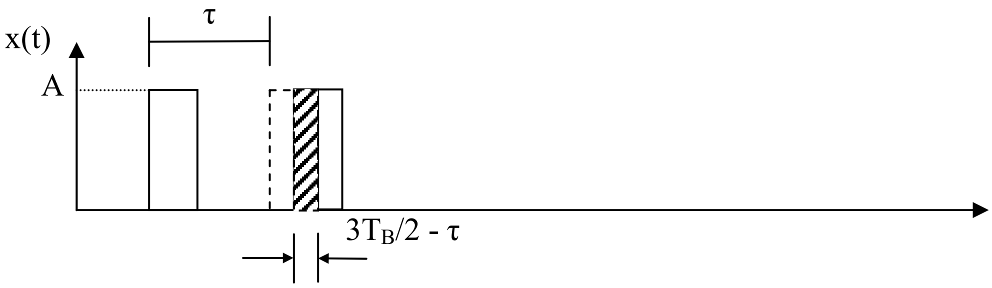


Como a probabilidade de ocorrerem dois “1” seguidos é 25%, temos uma área total igual a N/4 vezes a área de $A^2(T_B/2- \tau)$. A função autocorrelação passa a se resumir a:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{NT_B}\left[\frac{N}{4}A^2(-\frac{T_B}{2}+\tau)\right]$$

$$R_x(\tau) = \frac{-A^2}{4}\left[(\frac{1}{2}-\frac{\tau}{T_B})\right]$$

Para $3T_B/2 > \tau > T_B$, temos:

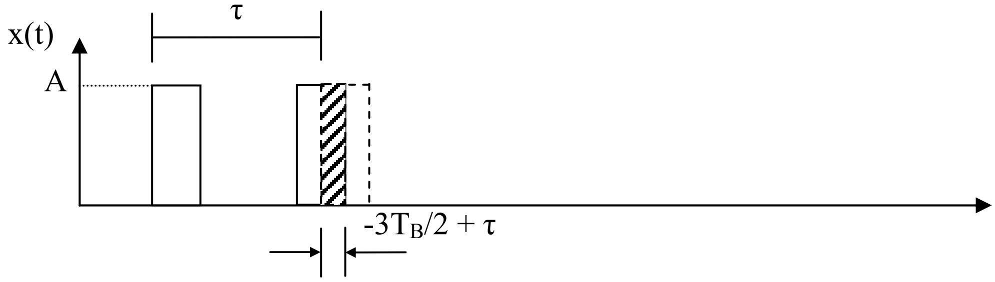


Como a probabilidade de ocorrerem “1” em K e em K+2 é também 25%, temos uma área total igual a N/4 vezes a área de $A^2(3T_B/2- \tau)$. A função autocorrelação passa a se resumir a:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{NT_B}\left[\frac{N}{4}A^2(-\frac{3T_B}{2}+\tau)\right]$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{4}\left[(\frac{3}{2}-\frac{\tau}{T_B})\right]$$

Para $2T_B > \tau > 3T_B/2$, temos:

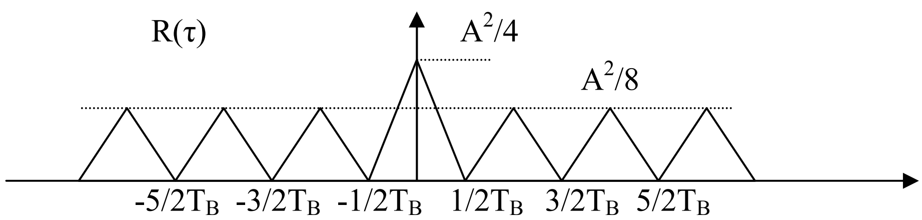


Novamente, ocorre probabilidade 25%, dessa forma:

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{NT_B}\left[\frac{N}{4}A^2(-\frac{3T_B}{2}+\tau)\right]$$

$$R_x(\tau) = \frac{-A^2}{4}\left[(\frac{3}{2}-\frac{\tau}{T_B})\right]$$

Como se pode perceber, a medida que τ avança intervalos de Tb/2 a correlação segue se deslocando de 3/2, 5/2, 7/2, 9/2 e mudando trocando o sinal da amplitude a cada repetição, lembrando-se que a autocorrelação é uma função par, cada avaliação feita anteriormente leva a um triângulo de com uma certa amplitude, conforme mostrado abaixo:



O sinal R(τ) pode ser dividido em três partes, uma de impulsos de amplitude $A^2/8$ que é convoluída com uma função triângulo, ou seja de $\Delta(T_B)$, e uma que é somada ao resultado, essa parcela é igual a um outro triângulo de amplitude igual a $A^2/8$, ou seja,

$A^2/8.\Delta(T_B)$. Assim, de acordo com as propriedade de convolução e linearidade, podemos encontrar a transformada de Fourier da autocorrelação, o que resulta na PSD, assim:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{8}\Delta(\tau / T_B) + \left[\sum_{N=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{8}\delta(\tau - NT_B)\right] * \Delta(\tau / T_B)$$

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(w)$$

$$S_x(w) = \frac{A^2 T_B}{16} sinc^2(\frac{wT_B}{4}) + \left[\frac{2\pi}{T_B}\sum_{N=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{8}\delta(w - \frac{2\pi N}{T_B})\right] \cdot \frac{T_B}{2} sinc^2(\frac{wT_B}{4})$$

$$S_x(w) = \frac{A^2 T_B}{16} sinc^2(\frac{wT_B}{4}) \cdot \left[1 + \frac{2\pi}{T_B}\sum_{N=-\infty}^{\infty}\delta(w - \frac{2\pi N}{T_B})\right]$$

O que resulta no mesmo valor do item anterior.